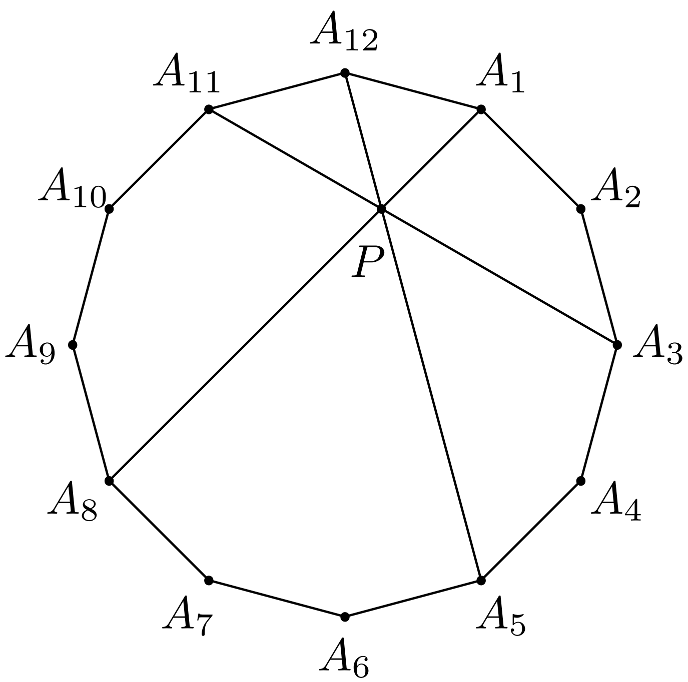
O PRZEKĄTNYCH WIELOKĄTÓW FOREMNYCH

Wojciech Guzicki

Instytut Matematyki Uniwersytetu Warszawskiego

Warszawa, 4 marca 2010 r.

TRZY PRZEKĄTNE DWUNASTOKĄTA FOREMNEGO



Twierdzenie. Przekątne

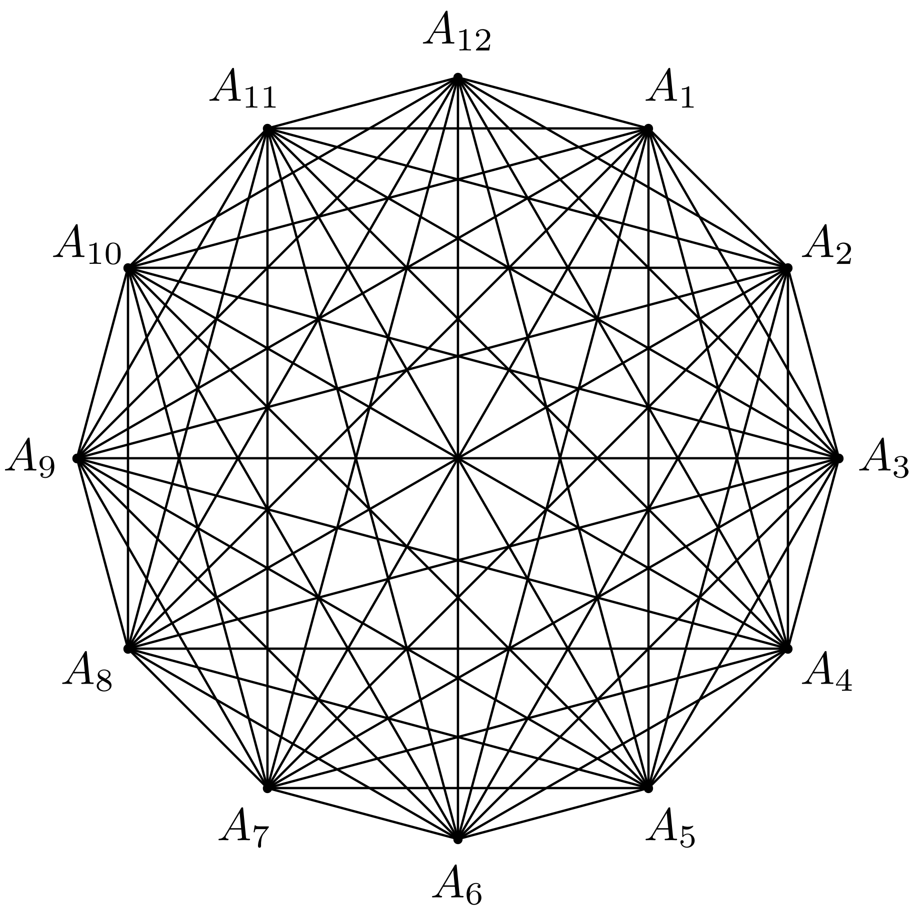
$$A_1A_8, \quad A_3A_{11} \quad \text{i} \quad A_5A_{12}$$

dwunastokąta foremnego

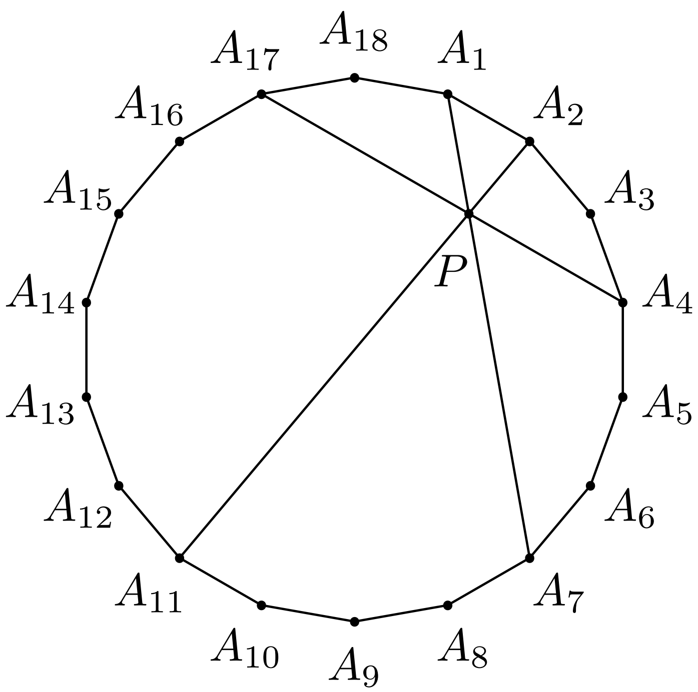
$$A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9A_{10}A_{11}A_{12}$$

przecinają się w jednym punkcie P.

WSZYSTKIE PRZEKĄTNE DWUNASTOKĄTA FOREMNEGO



TRZY PRZEKĄTNE OSIEMNASTOKĄTA FOREMNEGO



Twierdzenie. Przekątne

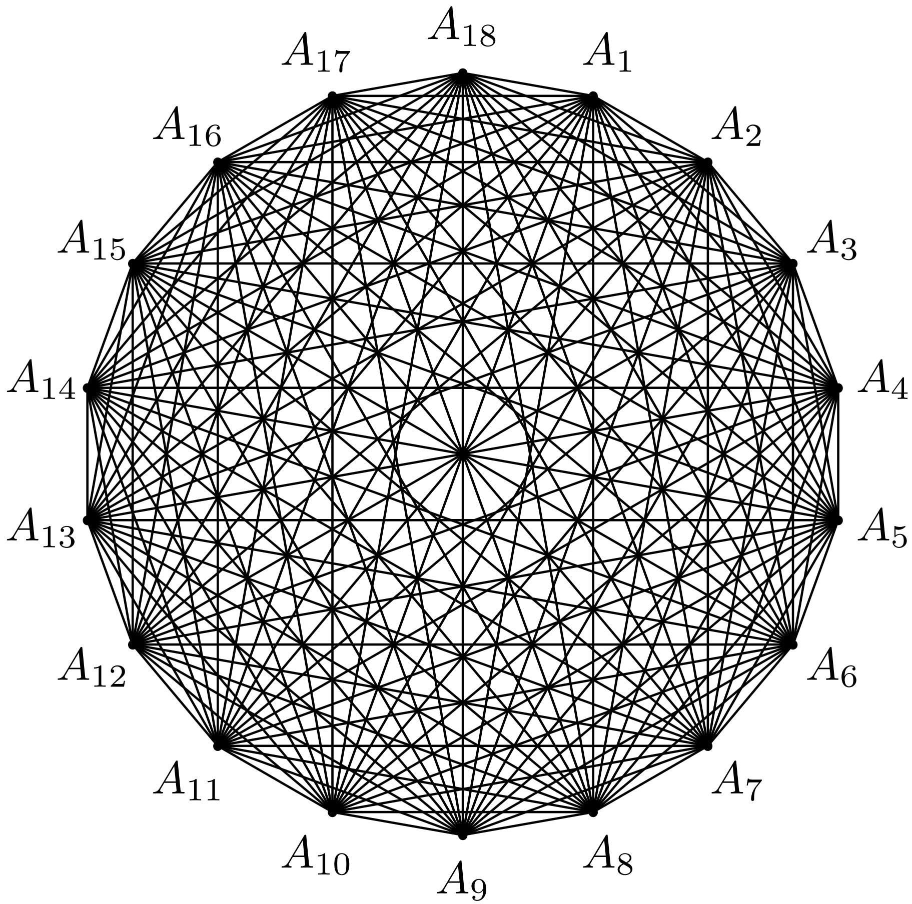
$$A_1A_7, \quad A_2A_{11} \quad \text{i} \quad A_4A_{17}$$

osiemnastokąta foremnego

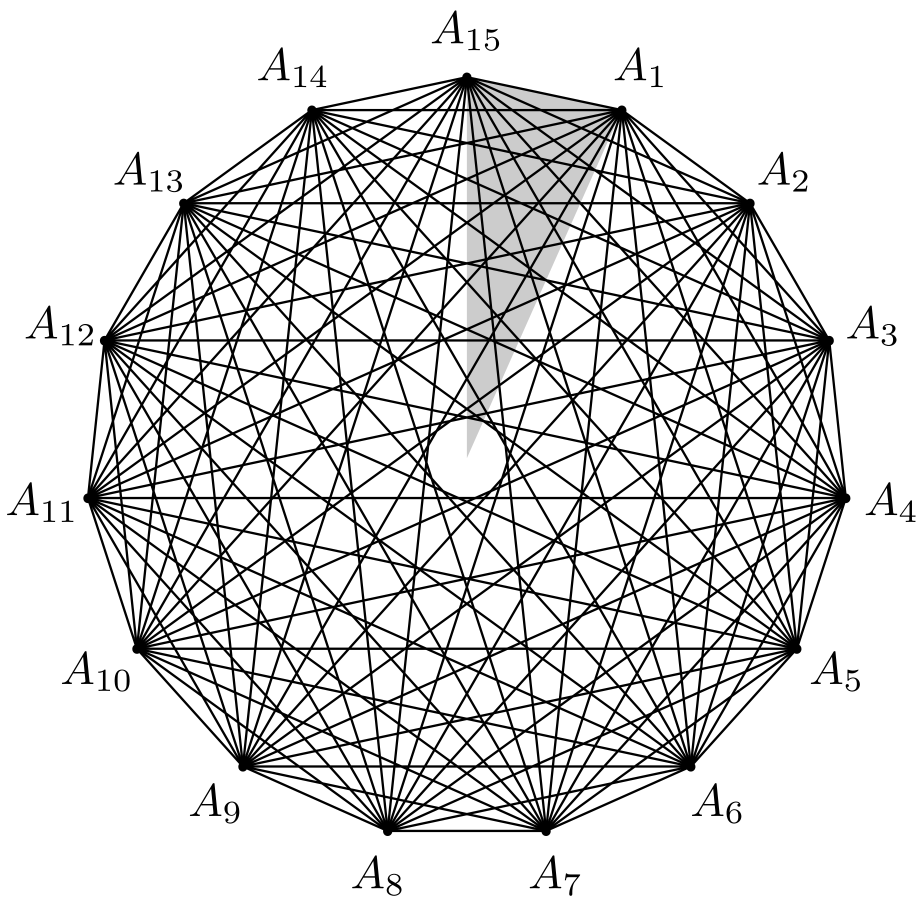
$$A_1A_2A_3\ldots A_{16}A_{17}A_{18}$$

przecinają się w jednym punkcie P.

WSZYSTKIE PRZEKĄTNE OSIEMNASTOKĄTA FOREMNEGO

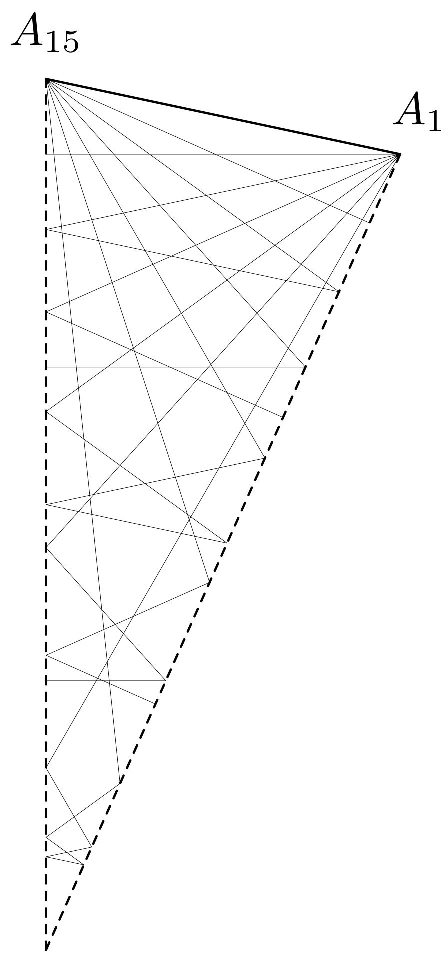


WSZYSTKIE PRZEKĄTNE PIĘTNASTOKĄTA FOREMNEGO

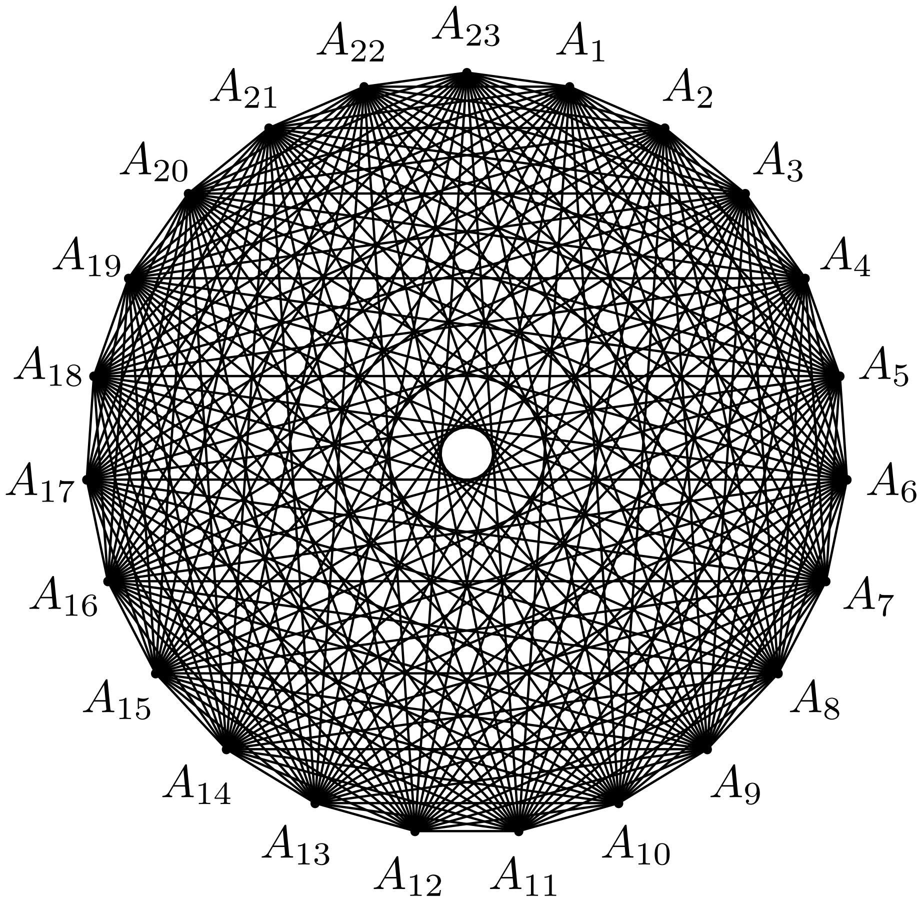


Warszawa, 4 marca 2010 r.

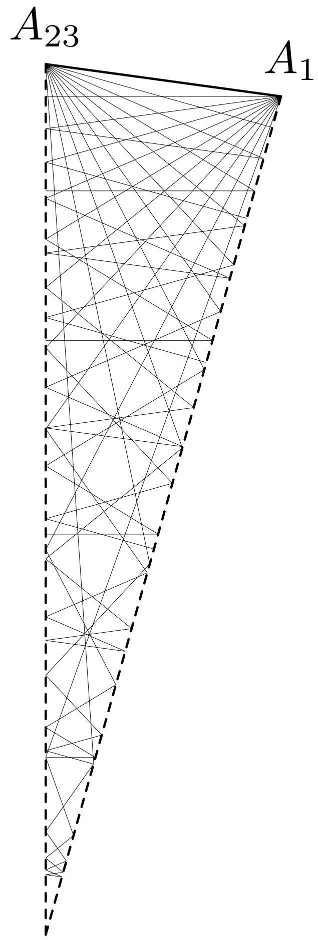
WSZYSTKIE PRZEKĄTNE PIĘTNASTOKĄTA FOREMNEGO

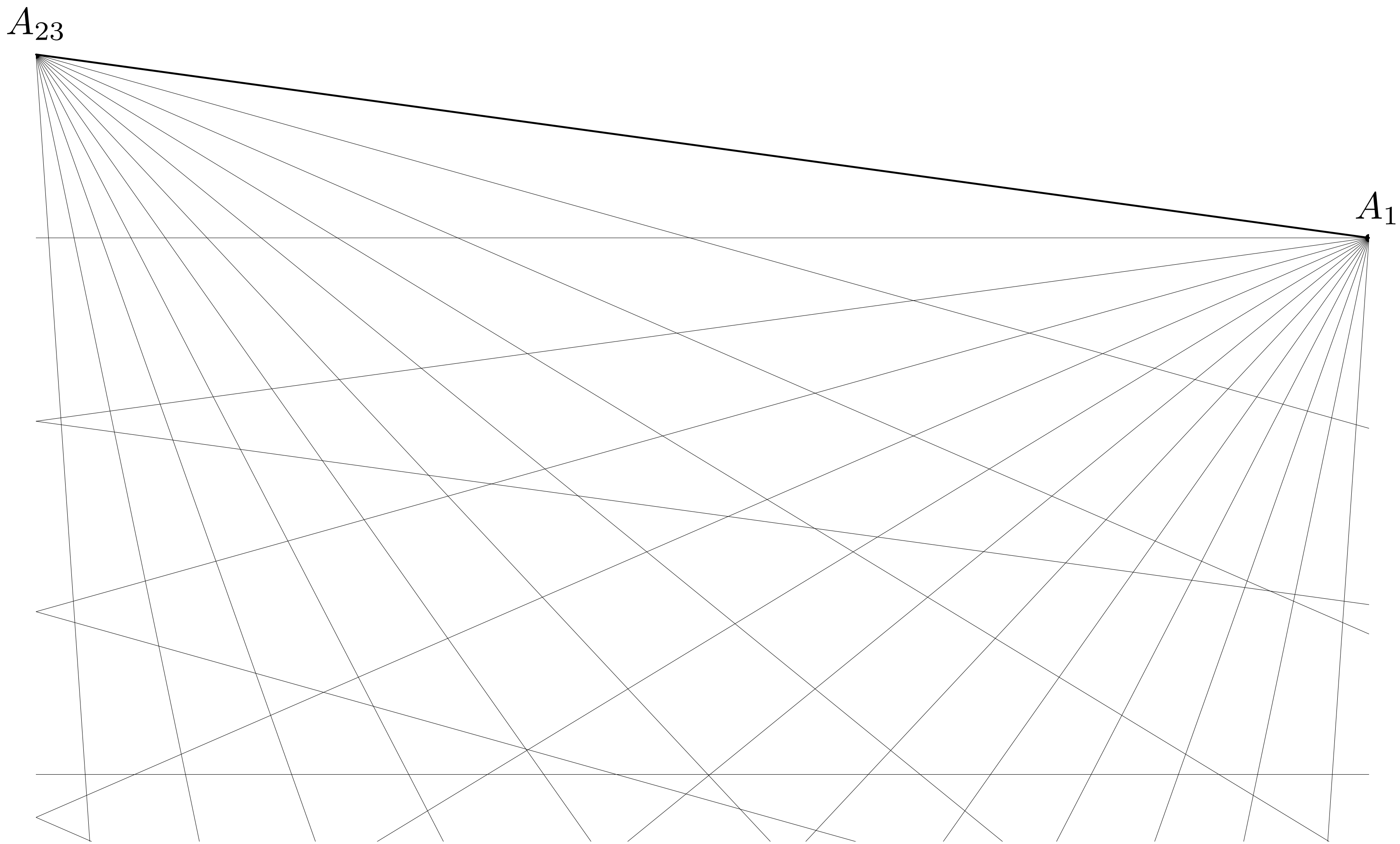


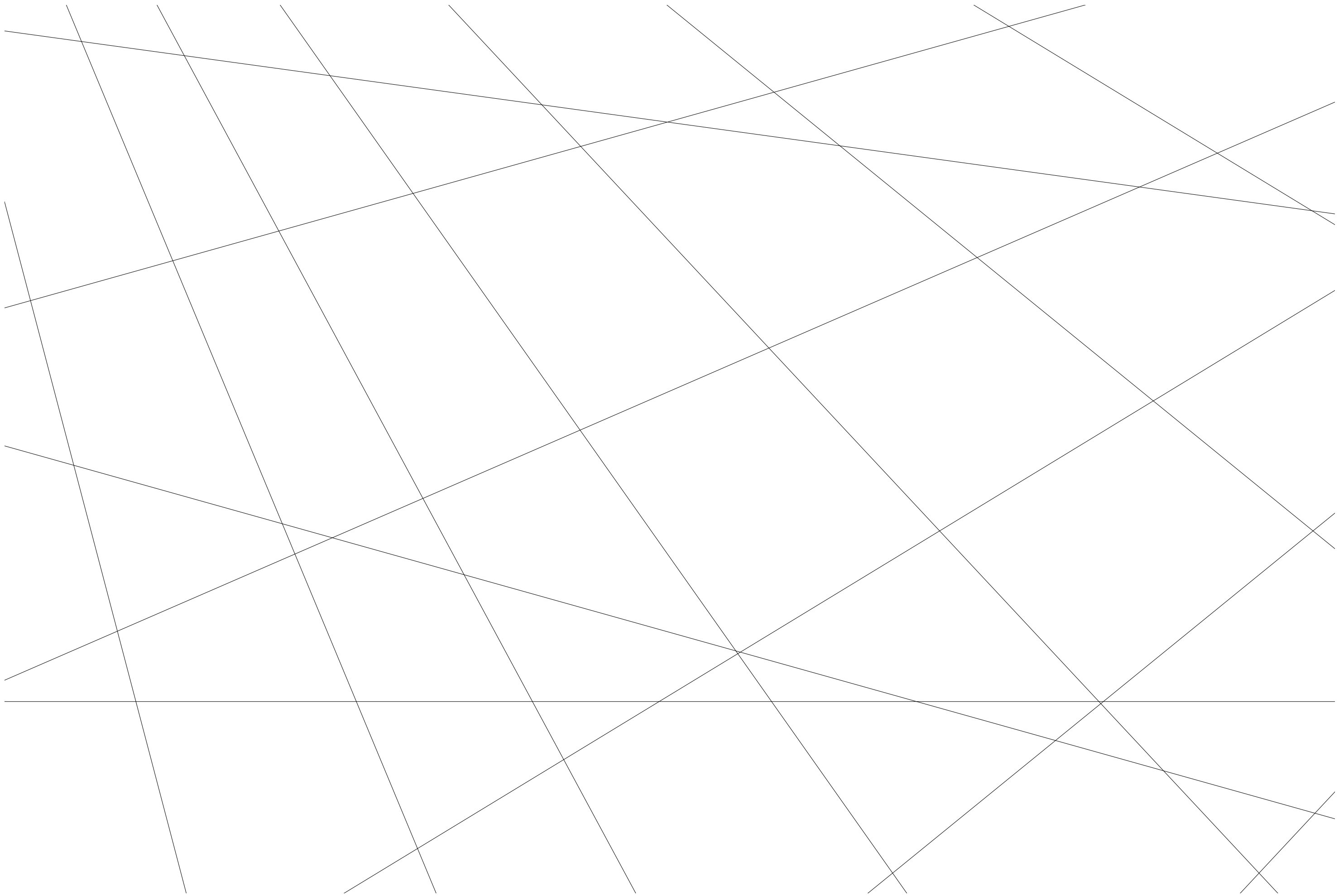
WSZYSTKIE PRZEKĄTNE DWUDZIESTOTRZYKĄTA FOREMNEGO



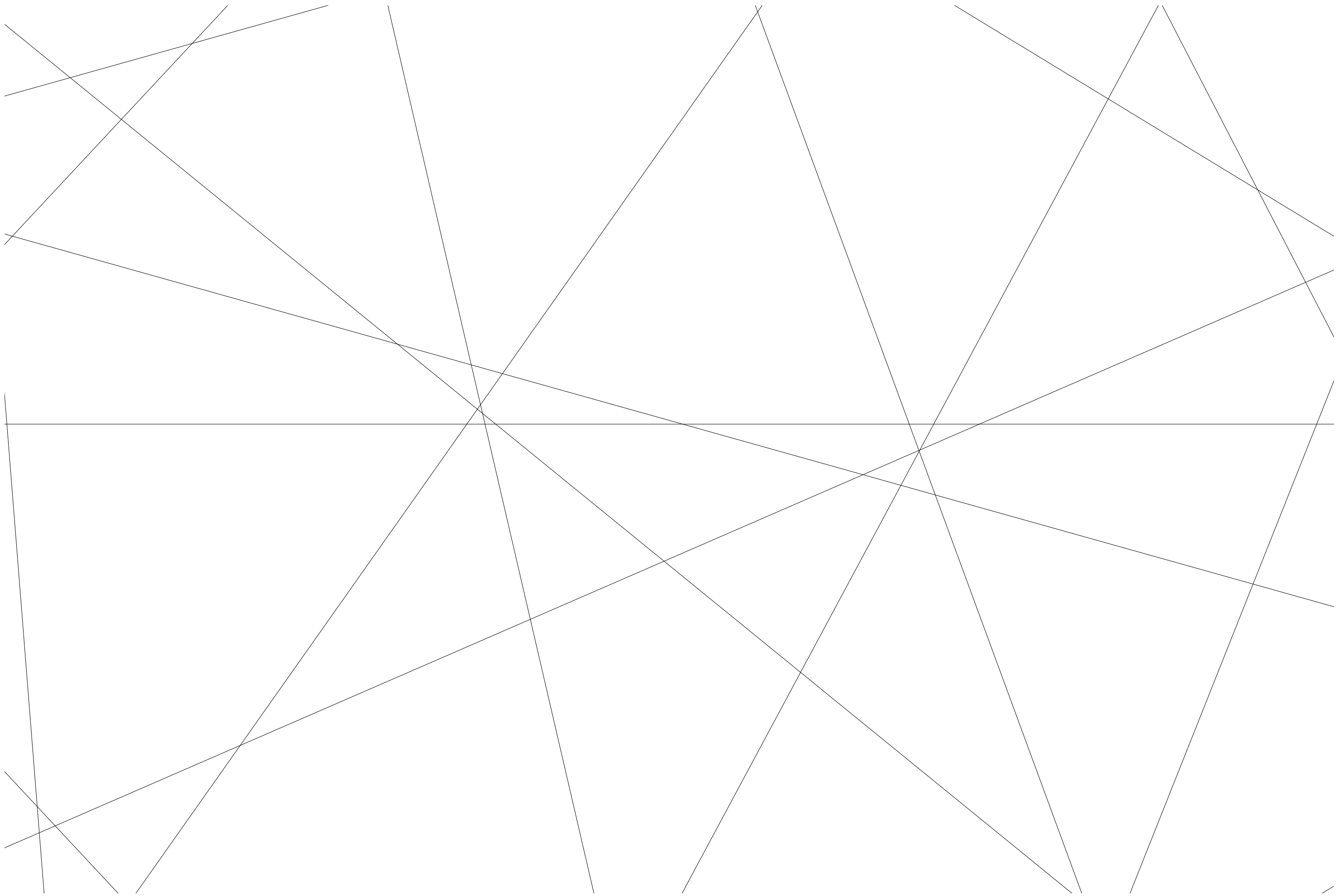
WSZYSTKIE PRZEKĄTNE DWUDZIESTOTRZYKĄTA FOREMNEGO



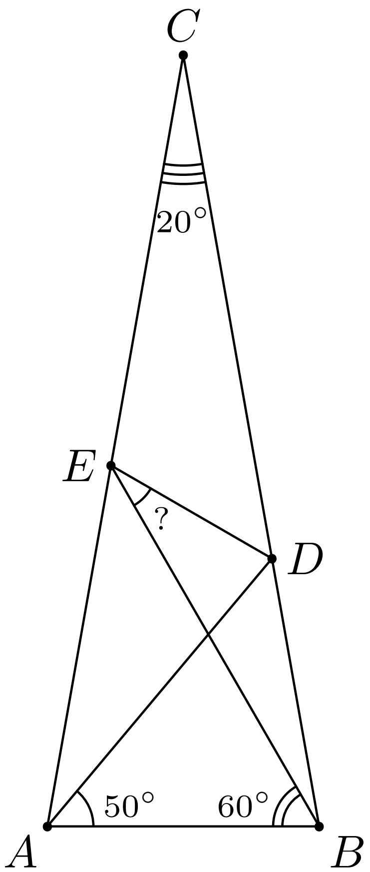

A_{23}
A_1



Warszawa, 4 marca 2010 r.



ZADANIE O TRÓJKĄCIE $80^\circ - 80^\circ - 20^\circ$



Zadanie. Dany jest trójkąt równoramienny ABC, w którym:

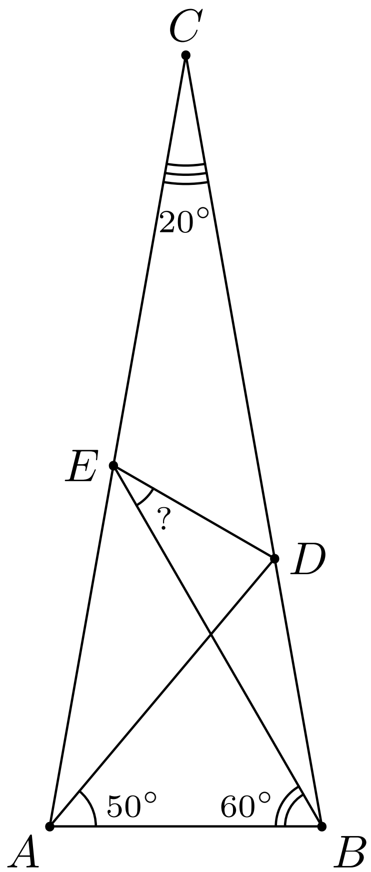
$$\measuredangle A = \measuredangle B = 80^\circ \quad \text{oraz} \quad \measuredangle C = 20^\circ.$$

W tym trójkącie poprowadzono odcinki AD i BE tak, że

$$\measuredangle BAD = 50^\circ \quad \text{oraz} \quad \measuredangle ABE = 60^\circ$$

(zob. rysunek). Oblicz miarę kąta BED.

ROZWIĄZANIE ZADANIA O TRÓJKĄCIE $80^\circ - 80^\circ - 20^\circ$



Oznaczmy przez x szukany kąt BED. Nietrudno obliczyć, że

$$\measuredangle ADB = 50^\circ \quad \text{oraz} \quad \measuredangle AEB = 40^\circ.$$

Stąd wynika w szczególności, że $AB = BD$. Następnie z twierdzenia sinusów dla trójkątów ABE i BDE otrzymujemy:

$$\frac{BE}{\sin 80^\circ} = \frac{AB}{\sin 40^\circ} \quad \text{oraz} \quad \frac{BE}{\sin(x+20^\circ)} = \frac{BD}{\sin x}.$$

Ponieważ $AB = BD$, więc

$$\frac{\sin(x+20^\circ)}{\sin x} = \frac{\sin 80^\circ}{\sin 40^\circ},$$

czyli

$$\frac{\sin x \cos 20^\circ + \cos x \sin 20^\circ}{\sin x} = \frac{2\sin 40^\circ \cos 40^\circ}{\sin 40^\circ}.$$

ROZWIĄZANIE RÓWNANIA TRYGONOMETRYCZNEGO

Otrzymaliśmy równanie trygonometryczne:

$$\frac{\sin x \cos 20^\circ + \cos x \sin 20^\circ}{\sin x} = \frac{2\sin 40^\circ \cos 40^\circ}{\sin 40^\circ},$$

czyli

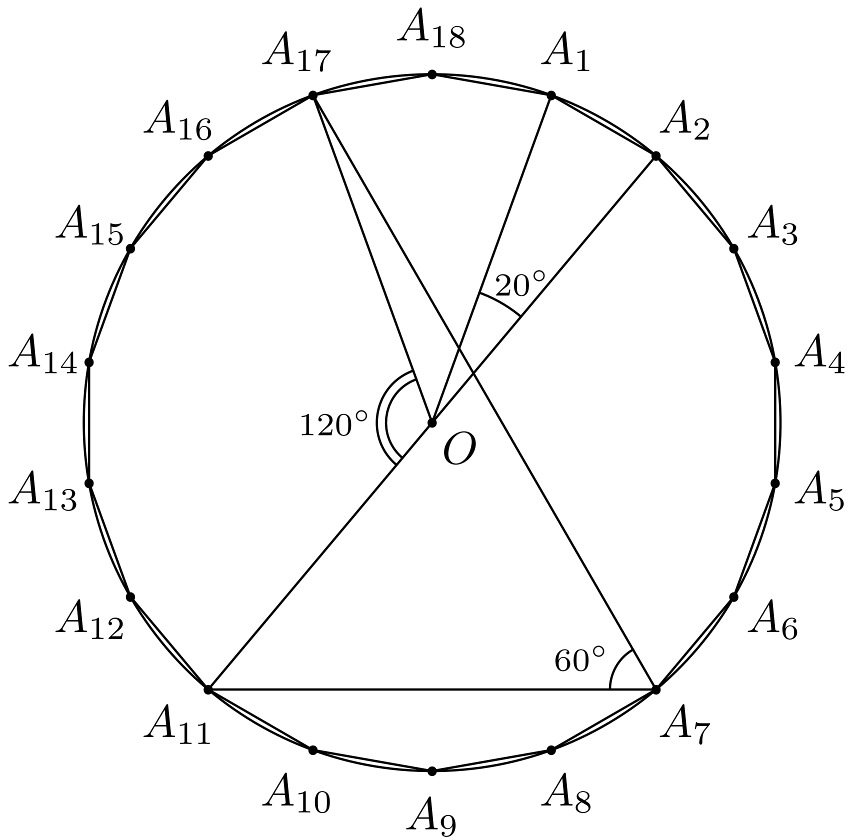
$$\cos 20^\circ + \operatorname{ctg} x \sin 20^\circ = 2\cos 40^\circ.$$

Stąd otrzymujemy

$$\begin{aligned}\operatorname{ctg} x &= \frac{2\cos 40^\circ - \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{2\sin 50^\circ - \sin 70^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{\sin 50^\circ + \sin 50^\circ - \sin 70^\circ}{\sin 20^\circ} = \\ &= \frac{\sin 50^\circ - 2\sin 10^\circ \cos 60^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{\sin 50^\circ - \sin 10^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{2\sin 20^\circ \cos 30^\circ}{\sin 20^\circ} = \sqrt{3}.\end{aligned}$$

Zatem $x = 30^\circ$.

KĄTY ŚRODKOWE I WPISANE; KĄT MIĘDZY PRZEKĄTNYMI W OSIEMNASTOKĄCIE FOREMNYM



Kąt środkowy oparty na łuku łączącym dwa kolejne wierzchołki osiemnastokąta foremnego wpisanego w okrąg (np. kąt A_1OA_2) jest równy

$$360^\circ : 18 = 20^\circ.$$

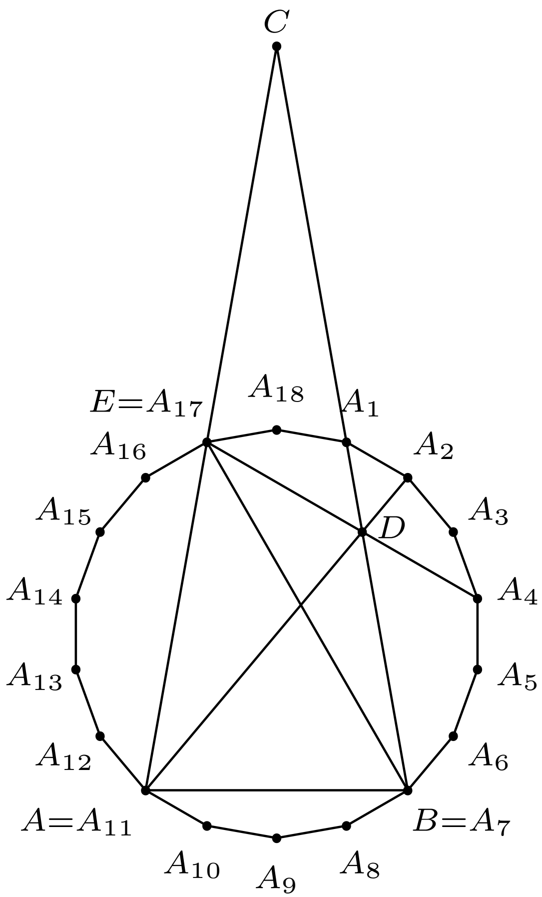
Kąt środkowy oparty na łuku k razy większym jest równy $k \cdot 20^\circ$, np.

$$\measuredangle A_{11}OA_{17} = 120^\circ.$$

Kąt wpisany jest dwa razy mniejszy od kąta środkowego opartego na tym samym łuku. Zatem np.

$$\measuredangle A_{11}A_7A_{17} = 60^\circ.$$

ROZWIĄZANIE ZADANIA O TRÓJKĄCIE $80^\circ - 80^\circ - 20^\circ$



Niech $A = A_{11}$ oraz $B = A_7$.

Niech C będzie punktem przecięcia prostych $A_{17}A$ i A_1B.

Zauważmy, że wtedy

$$\measuredangle BAA_{17} = ABA_1 = 80^\circ,$$

a więc trójkąt ABC jest trójkątem danym w zadaniu.

Ponieważ $\measuredangle ABA_{17} = 60^\circ$, więc $A_{17} = E$.

Ponieważ $\measuredangle BAA_2 = 50^\circ$, więc punkt D jest punktem przecięcia przekątnych $A_{11}A_2$ i A_7A_1.

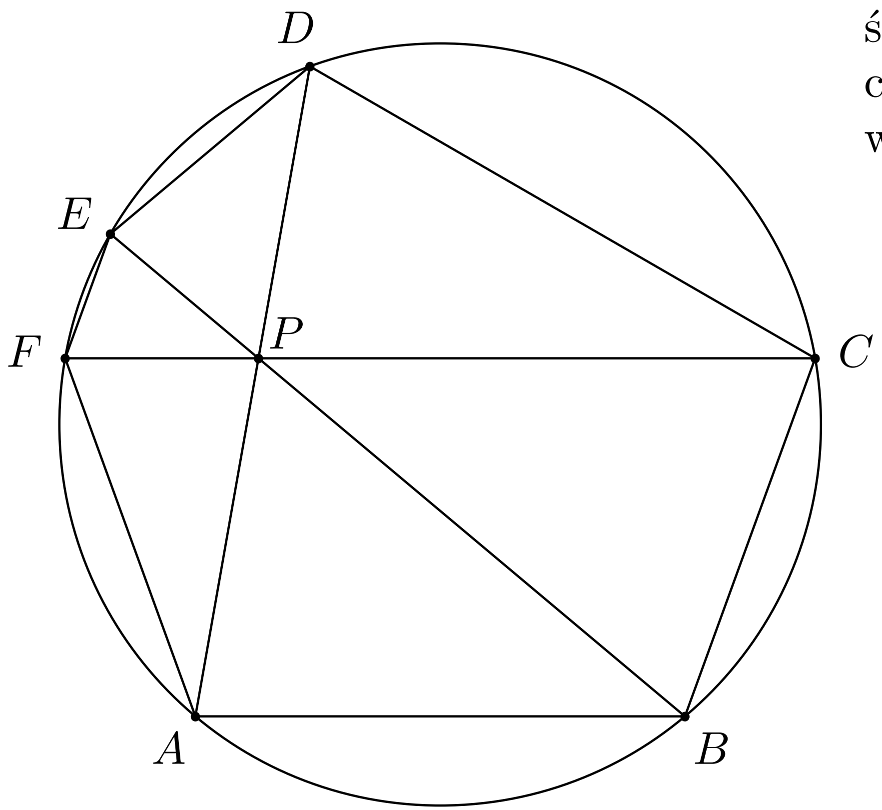
Pokażemy, że przekątne osiemnastokąta

$$A_1A_7, \quad A_2A_{11} \quad \text{i} \quad A_4A_{17}$$

przecinają się w jednym punkcie. Wówczas

$$\measuredangle BED = \measuredangle A_7A_{17}A_4 = 30^\circ.$$

PRZEKĄTNE SZEŚCIOKĄTA WPISANEGO W OKRĄG

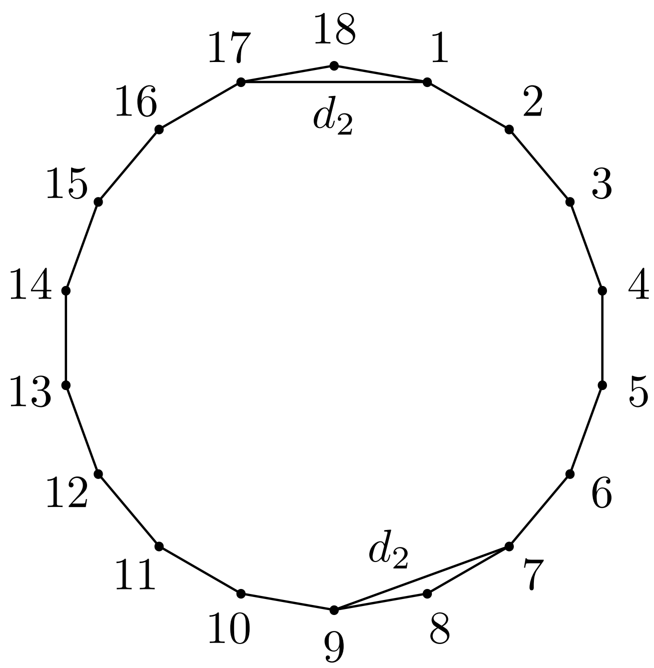


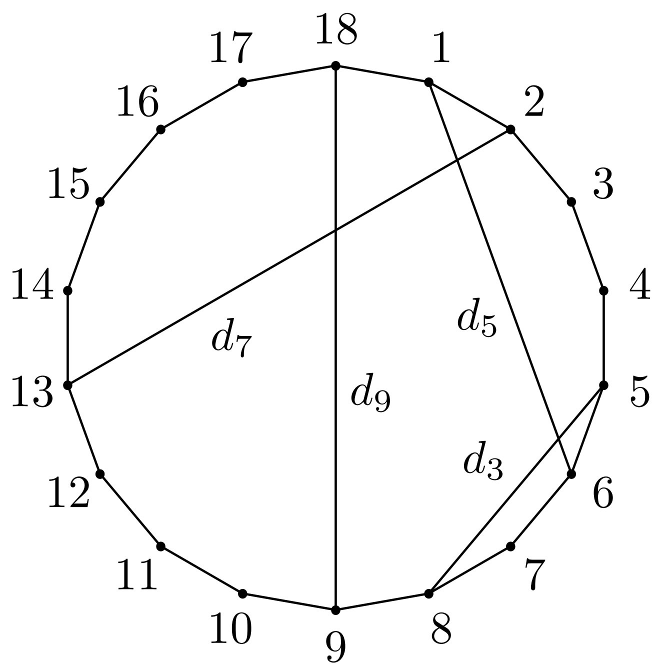
Twierdzenie 2. Przekątne AD, BE i CF sześciokąta $ABCDEF$ wpisanego w okrąg przecinają się w jednym punkcie P wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{AB}{BC} \cdot \frac{CD}{DE} \cdot \frac{EF}{FA} = 1.$$

DŁUGOŚCI PRZEKĄTNYCH

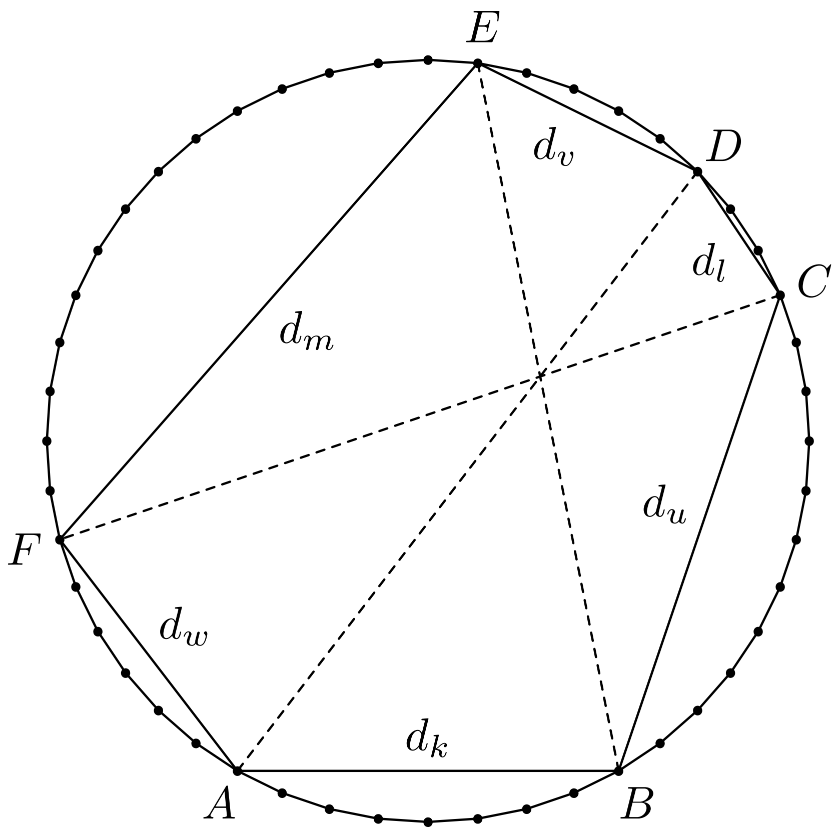
$$1 \leq k \leq \frac{n}{2}$$





$$\frac{n}{2} < k < n : \quad d_k = d_{n-k}$$

TRZY PRZEKĄTNE WIELOKĄTA FOREMNEGO



Twierdzenie. Przekątne AD, BE i CF wielokąta foremnego $ABCDEF$ przecinają się w jednym punkcie P wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{d_k}{d_u} \cdot \frac{d_l}{d_v} \cdot \frac{d_m}{d_w} = 1,$$

czyli

$$d_k \cdot d_l \cdot d_m = d_u \cdot d_v \cdot d_w.$$

KONFIGURACJE TRYWIALNE

Przypuśćmy, że tak jak wyżej, AD, BE i CF są przekątnymi sześciokąta $ABCDEF$ wpisanego w okrąg, przy czym

$$AB = d_k, \quad BC = d_u, \quad CD = d_l, \quad DE = d_v, \quad EF = d_m, \quad FA = d_w$$

oraz

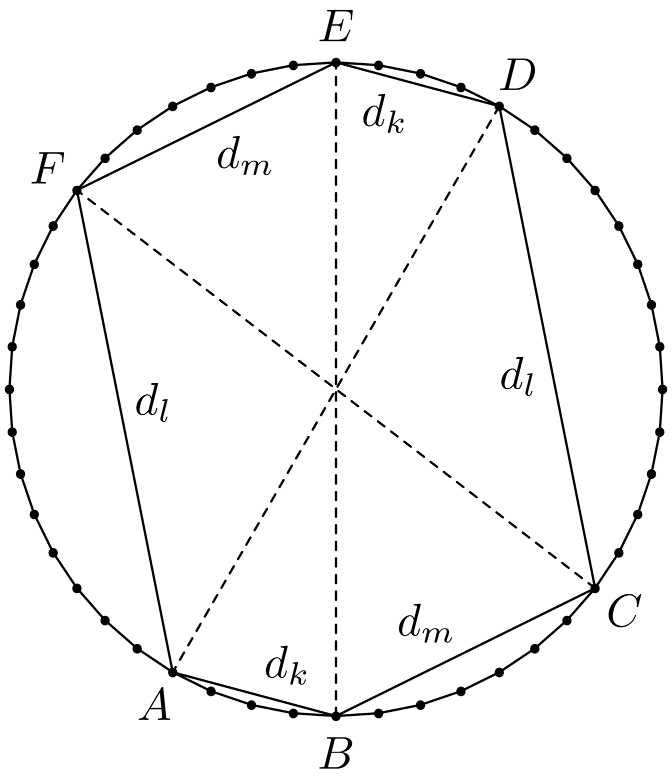
$$d_k \cdot d_l \cdot d_m = d_u \cdot d_v \cdot d_w.$$

Konfigurację przekątnych nazywamy **trywialną**, gdy liczby u, v, w tworzą permutację liczb k, l, m.

Istnieją trzy rodzaje konfiguracji trywialnych powstających z następujących permutacji:

- $u = m$, $v = k$, $w = l$;
- $u = k$, $v = m$, $w = l$;
- $u = k$, $v = l$, $w = m$.

PIERWSZA KONFIGURACJA TRYWIALNA

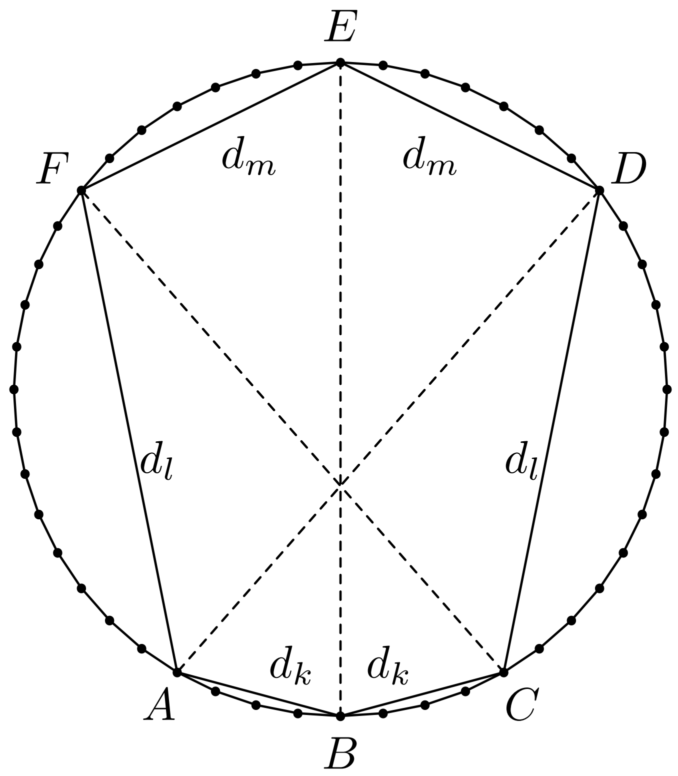


$$n = 48, \quad k = 4, \quad l = 13, \quad m = 7.$$

$$u = m, \quad v = k, \quad w = l.$$

Trzy średnice przecinające się
w środku okręgu

DRUGA KONFIGURACJA TRYWIALNA

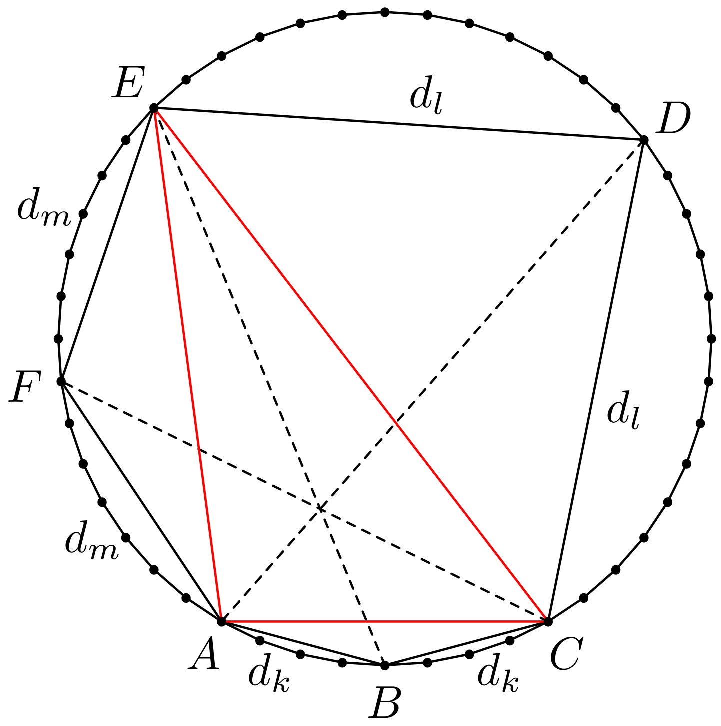


$$n = 48, \quad k = 4, \quad l = 13, \quad m = 7.$$

$$u = k, \quad v = m, \quad w = l.$$

Przekątne symetryczne przecinające się na osi symetrii (średnicy)

TRZECIA KONFIGURACJA TRYWIALNA

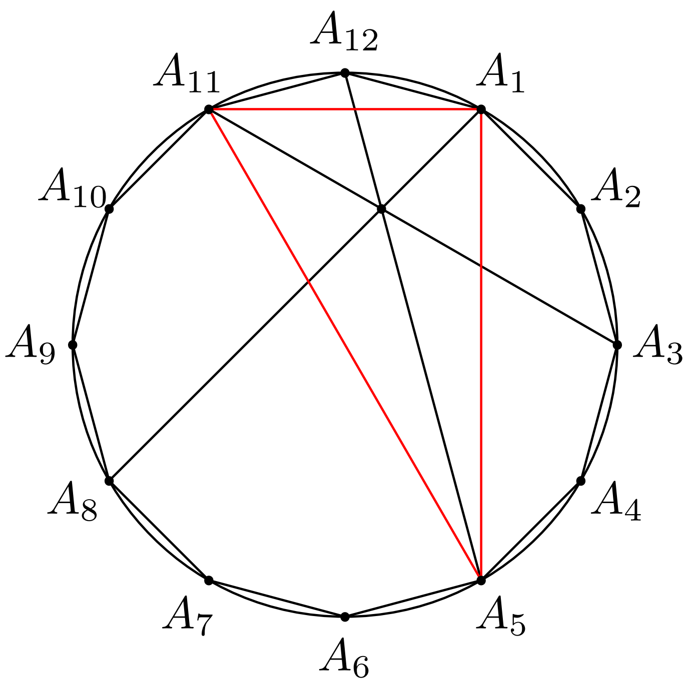


$$n = 48, \quad k = 4, \quad l = 13, \quad m = 7.$$

$$u = k, \quad v = l, \quad w = m.$$

Dwusieczne kątów trójkąta ACE

TRZY PRZEKĄTNE DWUNASTOKĄTA FOREMNEGO



Przekątne

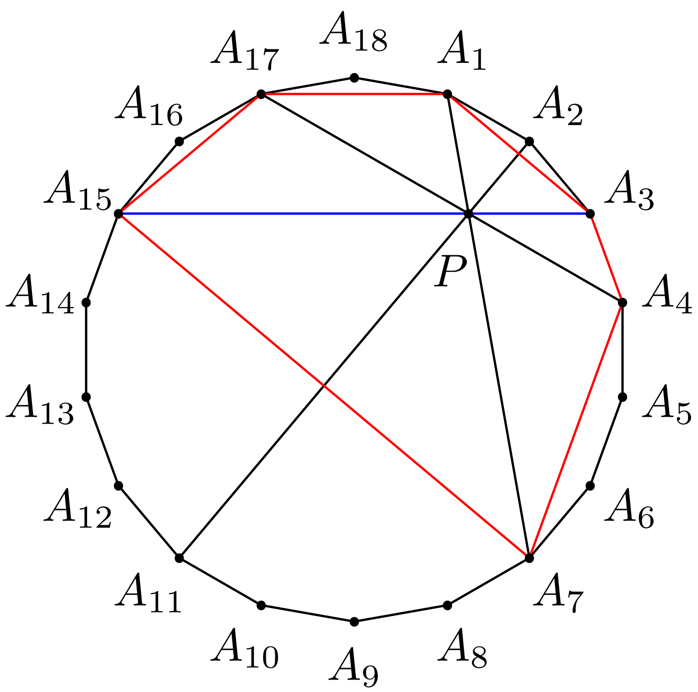
$$A_1A_8, \quad A_3A_{11} \quad \text{i} \quad A_5A_{12}$$

dwunastokąta foremnego

$$A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9A_{10}A_{11}A_{12}$$

są dwusiecznymi kątów trójkąta $A_1A_5A_{11}$.

TRZY PRZEKĄTNE OSIEMNASTOKĄTA FOREMNEGO



Twierdzenie. Przekątne

$$A_1A_7, \quad A_2A_{11} \quad \text{i} \quad A_4A_{17}$$

osiemnastokąta foremnego

$$A_1A_2A_3\dots A_{16}A_{17}A_{18}$$

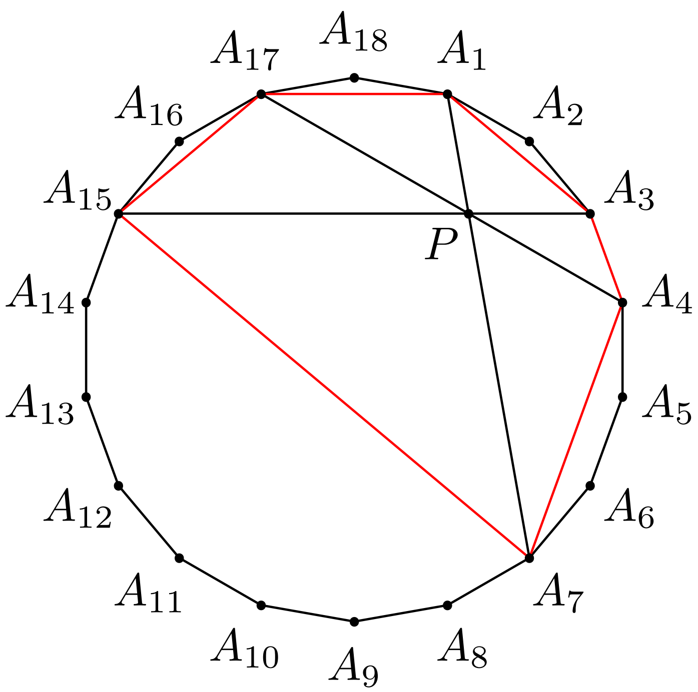
przecinają się w jednym punkcie P.

Dowód. Niech P będzie punktem przecięcia przekątnych A_2A_{11} i A_1A_7. Zauważmy, że przekątna A_2A_{11} jest osią symetrii osiemnastokąta foremnego. Przekątną symetryczną do A_1A_7 jest A_3A_{15}. Wystarczy zatem pokazać, że przekątne

$$A_1A_7, \quad A_3A_{15} \quad \text{i} \quad A_4A_{17}$$

przecinają się w jednym punkcie.

TRZY NOWE PRZEKĄTNE OSIEMNASTOKĄTA FOREMNEGO



Mamy pokazać, że przekątne

$$A_1A_7, \quad A_3A_{15} \quad \text{i} \quad A_4A_{17}$$

osiemnastokąta foremnego

$$A_1A_2A_3\ldots A_{16}A_{17}A_{18}$$

przecinają się w jednym punkcie P.

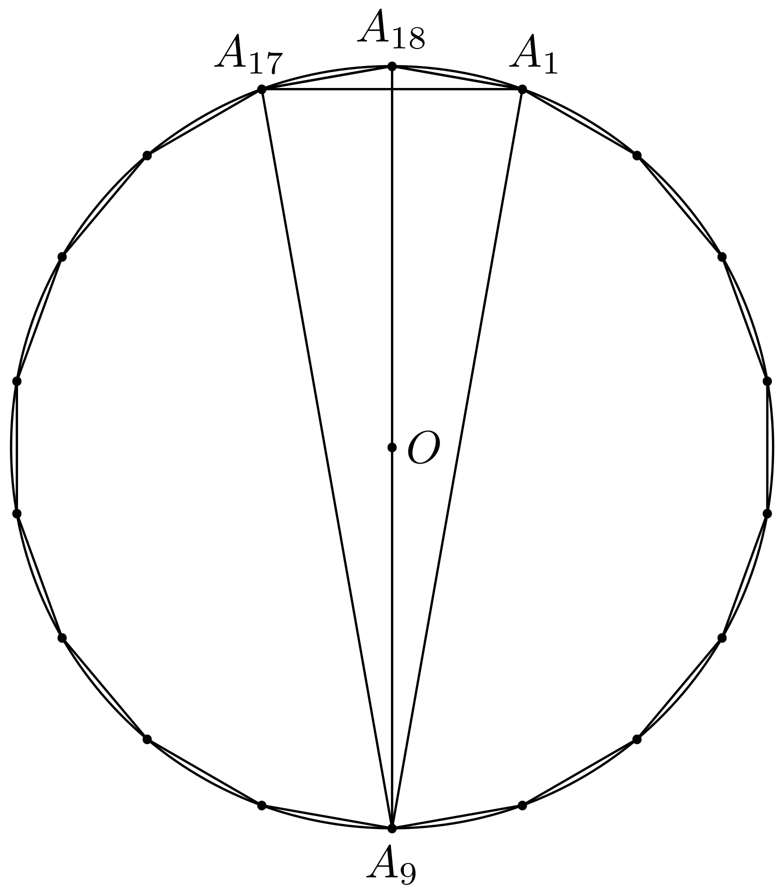
Do tego wystarczy, by

$$\frac{d_8}{d_3}\cdot\frac{d_1}{d_2}\cdot\frac{d_2}{d_2}=1,$$

czyli

$$d_8\cdot d_1=d_3\cdot d_2.$$

LEMAT O DELTOIDZIE



Mamy pokazać, że: $d_8 \cdot d_1 = d_3 \cdot d_2$.

Niech r będzie promieniem okręgu opisanego na osiemnastokącie. Nietrudno zauważyć, że wtedy $r = d_3$. Mamy więc pokazać, że

$$d_8 \cdot d_1 = r \cdot d_2.$$

Weźmy deltoid $A_{18}A_{17}A_9A_1$. Wówczas jego pole jest równe

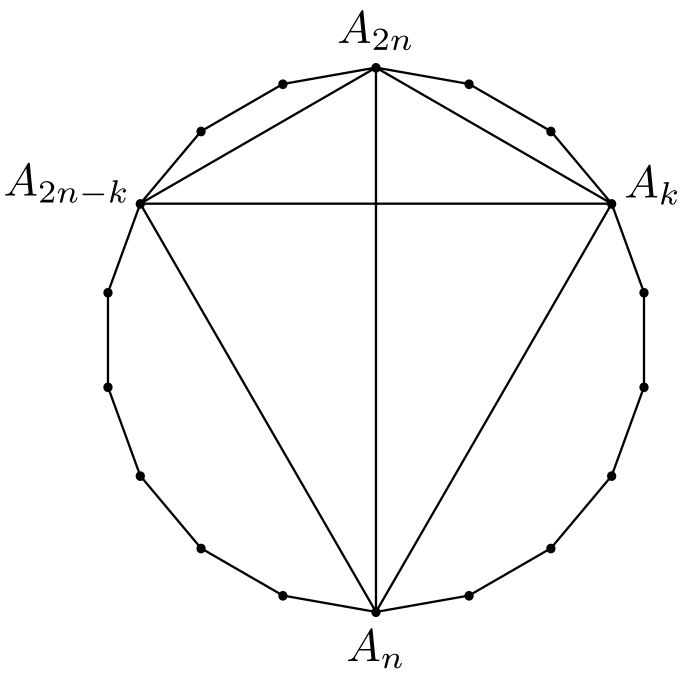
$$P = \frac{1}{2} \cdot A_{18}A_9 \cdot A_{17}A_1 = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot d_2 = r \cdot d_2.$$

Z drugiej strony kąty $A_{18}A_{17}A_9$ i $A_{18}A_1A_9$ są proste, skąd wynika, że

$$P = \frac{1}{2} \cdot (A_{18}A_{17} \cdot A_{17}A_9 + A_{18}A_1 \cdot A_1A_9) = d_8 \cdot d_1,$$

co kończy dowód.

LEMAT O DELTOIDZIE – OGÓLNIE



Twierdzenie. Dany jest wielokąt foremny mający $2n$ boków wpisany w okrąg o promieniu r i dana jest liczba k taka, że $1 \leq k < \frac{n}{2}$. Wtedy

$$d_k \cdot d_{n-k} = d_{2k} \cdot r.$$

TWIERDZENIE O PRZEKĄTNYCH WIELOKĄTÓW FOREMNYCH

Niech n będzie liczbą boków wielokąta foremnego. Wówczas:

1. Jeśli n jest liczbą nieparzystą, to żadne trzy przekątne nie przecinają się w jednym punkcie.

2. Jeśli n jest liczbą parzystą, niepodzielną przez 6, to istnieją tylko konfiguracje trywialne przekątnych przecinających się w jednym punkcie.

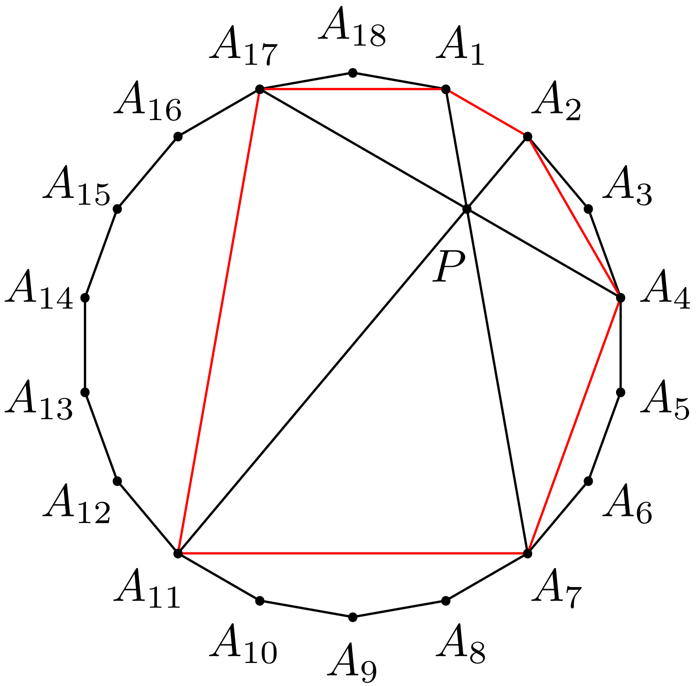
3. Jeśli n jest liczbą podzielną przez 6, to oprócz konfiguracji trywialnych istnieją 4 serie konfiguracji nietrywialnych oraz 65 tzw. konfiguracji sporadycznych.

CZTERY SERIE KONFIGURACJI NIETRYWIALNYCH

Dany jest wielokąt foremny mający $6n$ boków. Następujące równości opisują cztery serie konfiguracji nietrywialnych:

- $d_n \cdot d_k \cdot d_{2n-2k} = d_{2n+k} \cdot d_k \cdot d_{n-k}, \quad$ gdzie $0 < k < n$,
- $d_n \cdot d_k \cdot d_{3n-3k} = d_{n+k} \cdot d_{2k} \cdot d_{n-k}, \quad$ gdzie $0 < k < n$,
- $d_n \cdot d_{n-2k} \cdot d_{2k} = d_{3n+k} \cdot d_k \cdot d_{n-2k}, \quad$ gdzie $0 < k < \frac{n}{2}$,
- $d_{2n+k} \cdot d_k \cdot d_{2n-4k} = d_{n+k} \cdot d_{3k} \cdot d_{n-2k}, \quad$ gdzie $0 < k < \frac{n}{2}$.

TRZY PRZEKĄTNE OSIEMNASTOKĄTA FOREMNEGO



Twierdzenie. Przekątne

$$A_1A_7, \quad A_2A_{11} \quad \text{i} \quad A_4A_{17}$$

osiemnastokąta foremnego

$$A_1A_2A_3\dots A_{16}A_{17}A_{18}$$

przecinają się w jednym punkcie P.

Dowód. Jest to konfiguracja nietrywialna II serii. Wielokąt foremny mający $6n$ boków, $0 < k < n$.

$$d_n \cdot d_k \cdot d_{3n-3k} = d_{n+k} \cdot d_{2k} \cdot d_{n-k}.$$

Dla $n = 3$ i $k = 1$ dostajemy

$$d_3 \cdot d_1 \cdot d_6 = d_4 \cdot d_2 \cdot d_2,$$

czyli

$$\frac{d_6}{d_4} \cdot \frac{d_3}{d_2} \cdot \frac{d_1}{d_2} = 1.$$

CZTERY SERIE KONFIGURACJI NIETRYWIALNYCH W TRZYDZIESTOKĄCIE FOREMNYM

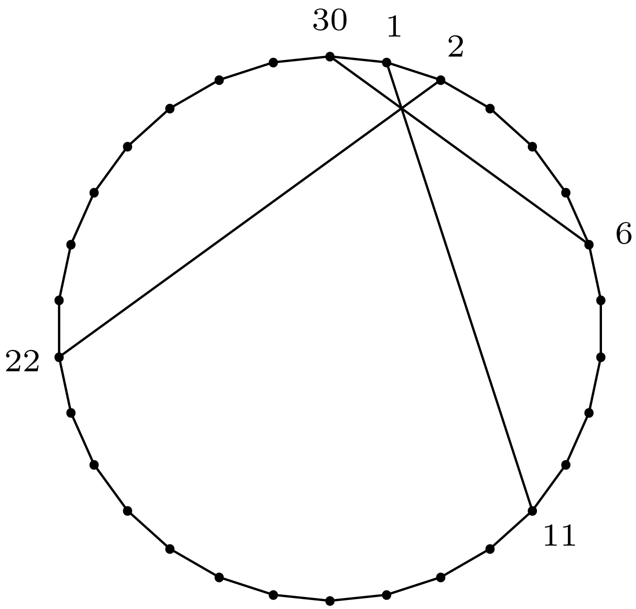
Nr	$6n$	k	l	m	u	v	w
1	30	1	4	11	1	5	8
2	30	2	3	12	2	5	6
3	30	2	3	13	3	4	5
4	30	1	4	14	2	4	5
5	30	1	5	12	2	4	6
6	30	2	5	9	3	4	7
7	30	2	6	8	3	5	6
8	30	1	8	9	3	4	5
9	30	1	3	16	2	3	5
10	30	1	2	17	1	4	5
11	30	1	6	11	3	3	6
12	30	2	2	12	1	6	7

$6n$ jest liczbą boków wielokąta

$$d_k \cdot d_l \cdot d_m = d_u \cdot d_v \cdot d_w.$$

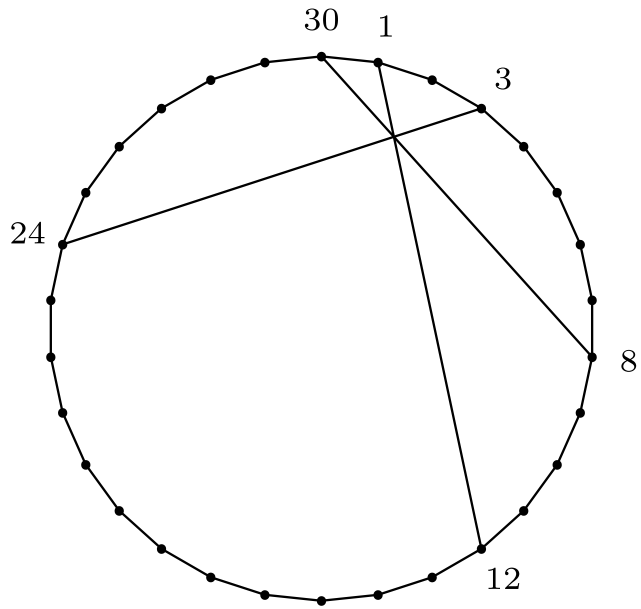
$$k + l + m + u + v + w = 6n.$$

PRZYKŁADY KONFIGURACJI NIETRYWIALNYCH – I



Seria I; $n = 5, k = 1$

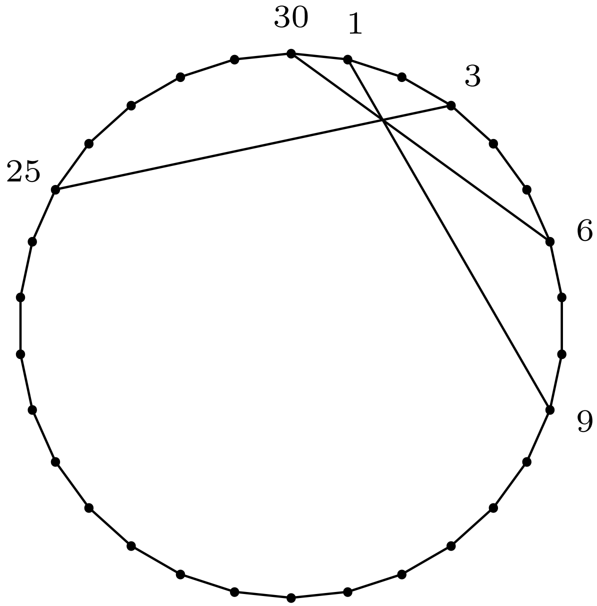
$d_1 \cdot d_4 \cdot d_{11} = d_1 \cdot d_5 \cdot d_8$



Seria II; $n = 5, k = 1$

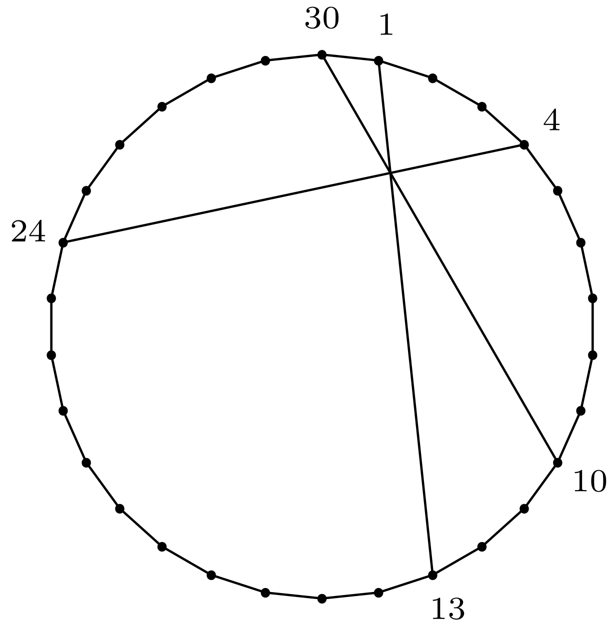
$d_1 \cdot d_5 \cdot d_{12} = d_2 \cdot d_4 \cdot d_6$

PRZYKŁADY KONFIGURACJI NIETRYWIALNYCH – II



Seria III; $n = 5, k = 1$

$d_1 \cdot d_3 \cdot d_{16} = d_2 \cdot d_3 \cdot d_5$



Seria IV; $n = 5, k = 1$

$d_1 \cdot d_6 \cdot d_{11} = d_3 \cdot d_3 \cdot d_6$

KONFIGURACJE SPORADYCZNE – I

Nr	$6n$	k	l	m	u	v	w
1	30	3	4	9	4	5	5
2	30	2	2	14	2	3	7
3	30	1	7	8	2	3	9
4	30	1	3	14	2	2	8
5	30	1	2	19	2	3	3
6	30	2	5	8	3	3	9
7	30	2	4	11	3	5	5
8	30	1	5	13	3	4	4
9	30	1	1	21	1	2	4
10	30	1	7	9	2	4	7
11	30	1	5	11	2	3	8
12	30	1	3	13	1	4	8
13	30	1	2	16	1	3	7

Nr	$6n$	k	l	m	u	v	w
14	42	3	5	15	4	5	10
15	42	2	8	13	3	7	9
16	42	1	9	15	2	7	8
17	42	1	7	19	3	4	8
18	42	1	7	13	2	3	16
19	42	1	2	26	1	3	9

KONFIGURACJE SPORADYCZNE – II

Nr	$6n$	k	l	m	u	v	w
20	60	3	5	29	4	6	13
21	60	3	5	27	4	5	16
22	60	3	5	25	3	6	18
23	60	1	16	18	3	5	17
24	60	1	13	27	5	6	8
25	60	1	13	25	3	8	10
26	60	5	10	17	8	9	11
27	60	5	8	19	6	9	13
28	60	4	11	13	5	6	21
29	60	3	11	18	5	7	16
30	60	3	6	23	4	5	19

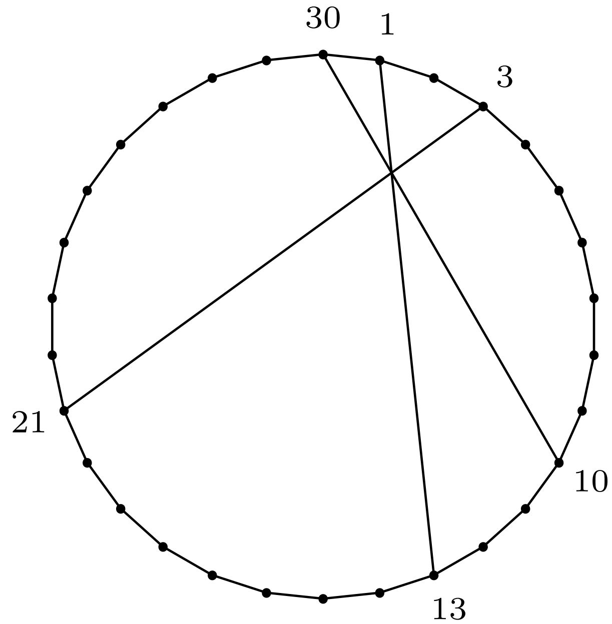
Nr	$6n$	k	l	m	u	v	w
31	60	2	7	19	3	4	25
32	60	2	5	35	4	6	8
33	60	2	3	33	2	4	16
34	60	1	18	21	5	7	8
35	60	1	16	23	5	6	9
36	60	1	14	25	4	7	9
37	60	1	13	22	3	5	16
38	60	1	10	31	4	6	8
39	60	1	10	25	3	4	17
40	60	1	8	27	2	5	17
41	60	1	6	31	2	4	16

KONFIGURACJE SPORADYCZNE – III

Nr	$6n$	k	l	m	u	v	w
42	84	7	18	19	11	13	16
43	84	6	11	23	7	8	29
44	84	4	13	23	6	7	31
45	84	2	7	49	4	6	16
46	84	1	25	30	5	7	16
47	84	1	20	35	5	6	17
48	84	1	18	37	4	7	17
49	84	1	14	43	4	6	16
50	90	5	13	35	11	12	14
51	90	2	19	32	5	9	23
52	90	1	23	31	4	6	25
53	90	1	17	47	5	8	12

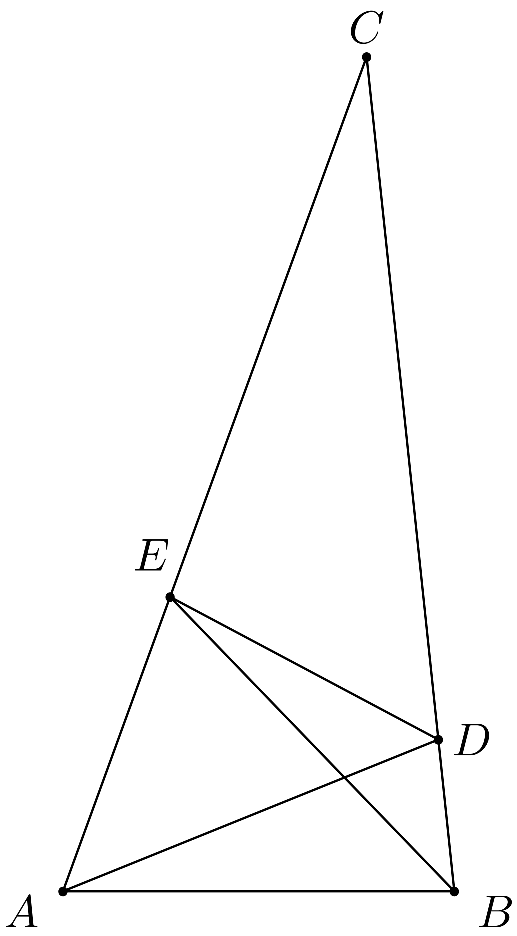
Nr	$6n$	k	l	m	u	v	w
54	120	13	18	31	16	19	23
55	120	10	19	29	12	13	37
56	120	6	23	29	8	13	41
57	120	2	13	73	6	10	16
58	120	1	42	43	7	11	16
59	120	1	36	49	7	10	17
60	120	1	32	53	6	11	17
61	120	1	26	61	6	10	16
62	210	14	41	48	15	31	61
63	210	13	21	83	15	24	54
64	210	6	28	97	15	17	47
65	210	1	45	121	11	14	18

PRZYKŁAD KONFIGURACJI SPORADYCZNEJ



$$d_1 \cdot d_7 \cdot d_8 = d_2 \cdot d_3 \cdot d_9$$

NOWE ZADANIE O TRÓJKĄCIE



Zadanie. Dany jest trójkąt ABC, w którym:

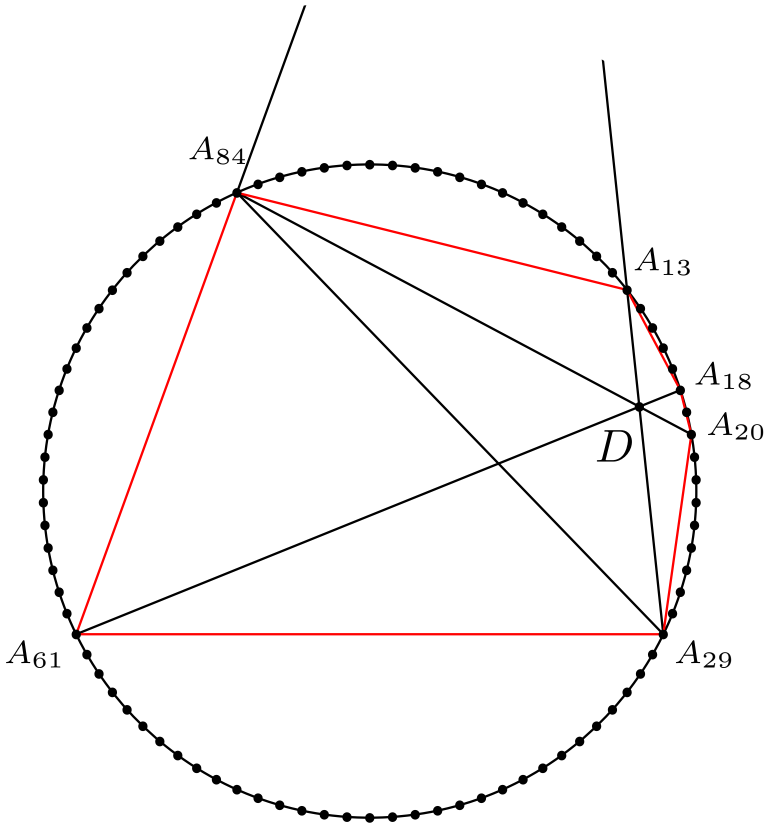
$$\measuredangle A = 70^\circ, \quad \measuredangle B = 84^\circ \quad \text{oraz} \quad \measuredangle C = 26^\circ.$$

W tym trójkącie poprowadzono odcinki AD i BE tak, że

$$\measuredangle BAD = 22^\circ \quad \text{oraz} \quad \measuredangle ABE = 46^\circ$$

(zob. rysunek). Oblicz miarę kąta BED.

NOWE ZADANIE O TRÓJKĄCIE



Zadanie. Dany jest trójkąt ABC, w którym:

$$\measuredangle A = 70^\circ, \quad \measuredangle B = 84^\circ \quad \text{oraz} \quad \measuredangle C = 26^\circ.$$

W tym trójkącie poprowadzono odcinki AD i BE tak, że

$$\measuredangle BAD = 22^\circ \quad \text{oraz} \quad \measuredangle ABE = 46^\circ$$

(zob. rysunek). Oblicz miarę kąta BED.

Rozwiązanie. Wystarczy zauważyć, że

$$d_{32} \cdot d_9 \cdot d_2 = d_5 \cdot d_{19} \cdot d_{23}$$

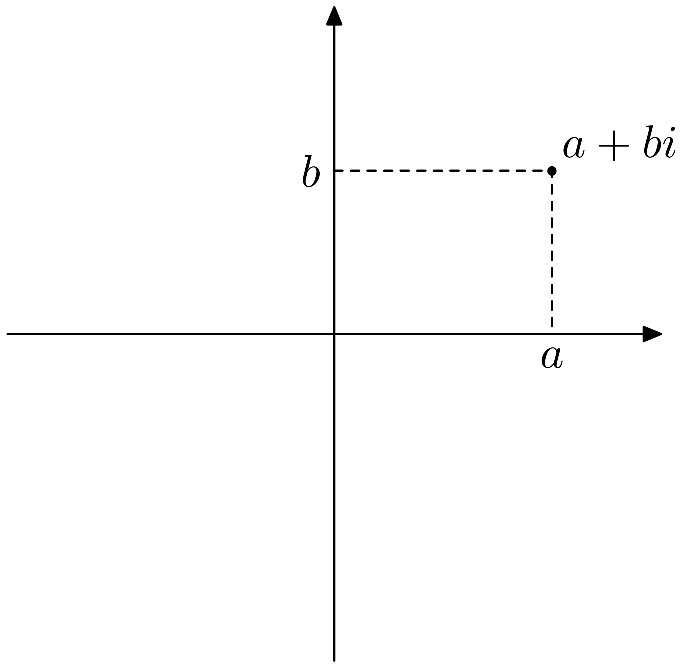
(konfiguracja sporadyczna nr 51 w 90-kącie foremnym). Wówczas

$$\measuredangle BED = \measuredangle A_{29}A_{84}A_{20} = 18^\circ.$$

LICZBY ZESPOLONE

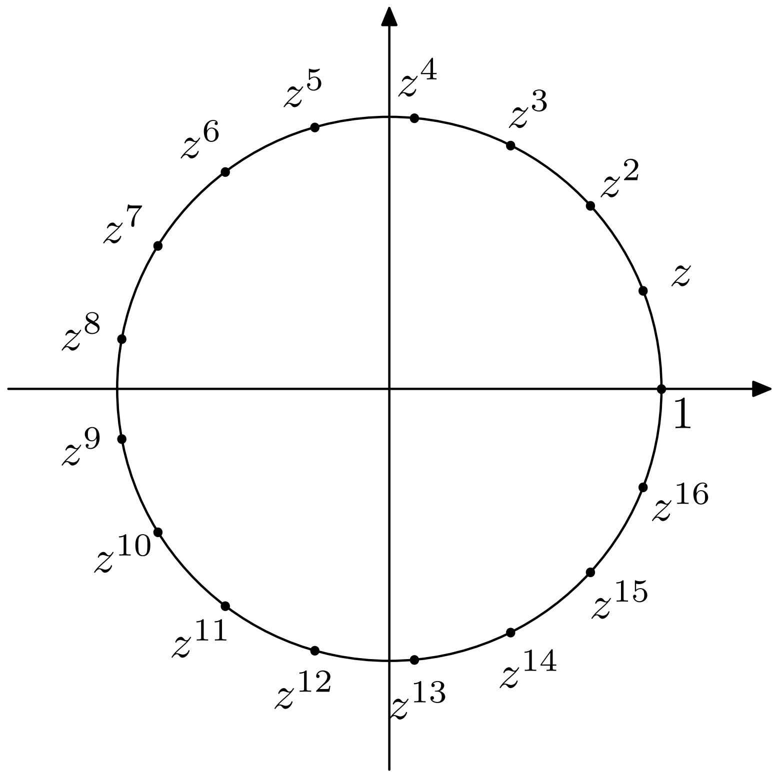
$$a + bi, \quad \text{gdzie} \quad i^2 = -1.$$

INTERPRETACJA GEOMETRYCZNA



PIERWIASTKI Z JEDNOŚCI

Liczby $1, z, z^2, \ldots, z^{n-1}$ są pierwiastkami równania $z^n = 1$.
Na rysunku $n = 17$:



Lemat algebraiczny.

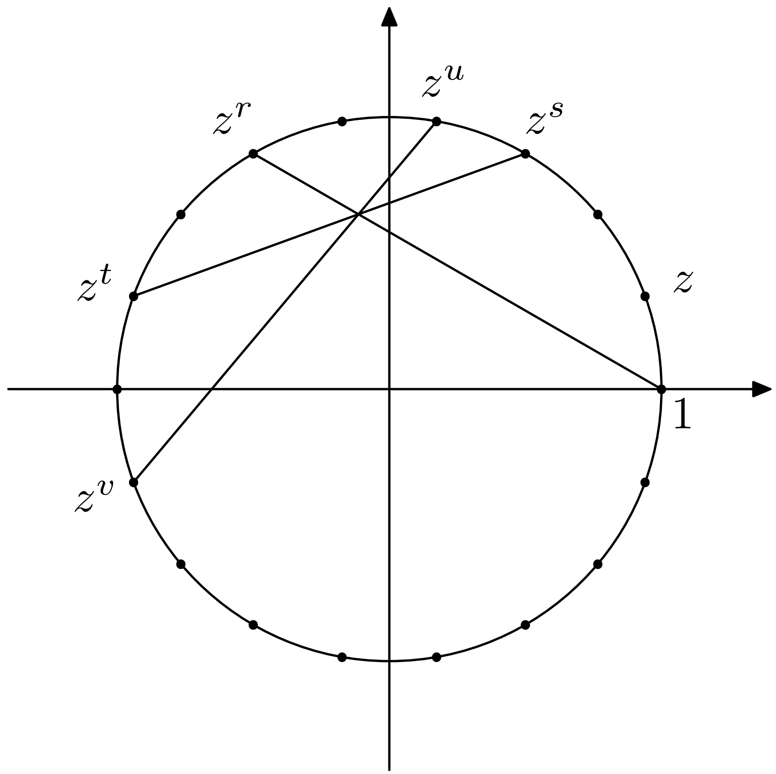
Niech n będzie liczbą nieparzystą i niech $1, z, z^2, \ldots, z^{n-1}$ będą pierwiastkami stopnia n z jedności (tzn. pierwiastkami równania $z^n = 1$). Niech następnie $W(X)$ i $V(X)$ będą takimi wielomianami o współczynnikach całkowitych, że $W(z) = V(z)$. Wtedy $W(z^2) = V(z^2)$.

Lemat geometryczny.

Liczby zespolone z, t, v i u leżą na okręgu jednostkowym. Wówczas odcinek o końcach z i t jest równoległy do odcinka o końcach u i v wtedy i tylko wtedy, gdy $zt = uv$.

Twierdzenie. Jeśli n jest liczbą nieparzystą, to żadne trzy przekątne n-kąta foremnego nie przecinają się w jednym punkcie.

Szkic dowodu. Przypuśćmy, że przekątne o końcach 1 i z^r, z^s i z^t oraz z^u i z^v przecinają się w jednym punkcie:



Można wówczas udowodnić, że zachodzi równość:

$$(z^s-1)(z^t-1)(z^{u+v-r}-1)=(z^u-1)(z^v-1)(z^{s+t-r}-1). \tag{1}$$

Definiujemy dwa wielomiany:

$$\begin{aligned} A(X)&=(X^s-1)(X^t-1)(X^{u+v-r}-1),\\ B(X)&=(X^u-1)(X^v-1)(X^{s+t-r}-1). \end{aligned}$$

Wtedy

$$A(z)=B(z).$$

Z lematu algebraicznego wynika, że

$$A(z^2)=B(z^2)$$

i stąd

$$\frac{A(z^2)}{A(z)}=\frac{B(z^2)}{B(z)},$$

czyli

$$(z^s+1)(z^t+1)(z^{u+v-r}+1)=(z^u+1)(z^v+1)(z^{s+t-r}+1). \tag{2}$$

Dodajemy równości (1) i (2), korzystając z tożsamości

$$(a+1)(b+1)(c+1)+(a-1)(b-1)(c-1)=2(abc+a+b+c).$$

Otrzymujemy

$$z^s+z^t+z^{u+v-r}=z^u+z^v+z^{s+t-r}$$

i stąd

$$(z^u-z^r)(z^v-z^r)=(z^s-z^r)(z^t-z^r). \tag{3}$$

Definiujemy następne wielomiany:

$$C(X)=(X^u-X^r)(X^v-X^r),$$
$$D(X)=(X^s-X^r)(X^t-X^r).$$

Mamy wówczas

$$C(z)=D(z).$$

Znów korzystamy z lematu algebraicznego, otrzymując kolejno:

$$C(z^2)=D(z^2),$$
$$\frac{C(z^2)}{C(z)}=\frac{D(z^2)}{D(z)},$$
$$(z^u+z^r)(z^v+z^r)=(z^s+z^r)(z^t+z^r). \tag{4}$$

Dodajemy stronami równości (3) i (4), otrzymując

$$2z^u z^v + 2z^r z^r = 2z^s z^t + 2z^r z^r,$$

czyli

$$z^u z^v = z^s z^t.$$

Z lematu geometrycznego wynika, że odcinki o końcach z^u i z^v oraz z^s i z^t są równoległe, wbrew założeniu, że przecinają się w punkcie P. Ta sprzeczność pokazuje, że wybrane trzy przekątne nie mogły przecinać się w jednym punkcie, co kończy dowód twierdzenia.

BIBLIOGRAFIA

[P] V. V. Prasolov, Intersection Points of the Diagonals of Regular Polygons, w: Essays on Number and Figures
`http://www.ams.org/bookstore/pspdf/mawrld-16-prev.pdf`

[R] T. Rike, An Intriguing Geometry Problem, Berkeley Math Circle
`http://mathcircle.berkeley.edu/BMC4/Handouts/geoprob.pdf`

[PR] B. Poonen, M. Rubinstein, The Number of Intersection Points Made by the Diagonals of a Regular Polygon,
`www-math.mit.edu/~poonen/papers/ngon.ps`
`http://www.math.uwaterloo.ca/~mrubinst/publications/ngon.pdf`
`http://arxiv.org/PS_cache/math/pdf/9508/9508209v3.pdf`
`www.mathematik.uni-bielefeld.de/~sillke/SEQUENCES/regular-n-gon.ps`
`http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.36.137`

W obu ostatnich pracach znajduje się obszerna bibliografia. Wiele prac można znaleźć w Internecie.

Warszawa, 4 marca 2010 r.

BIBLIOGRAFIA - ciąg dalszy

[C] The 80-80-20 Triangle, Cut-the-Knot
`http://www.cut-the-knot.org/triangle/80-80-20/index.shtml`

[K] C. Knop, Nine Solutions to One Problem, *Kvant*, 1993, no 6
К.Кноп, История с геометрией, или девять решений одной задачи
`http://kvant.mirror1.mccme.ru/`
`http://kvant.mirror1.mccme.ru/1993/06/istoriya_s_geometriej.htm`

[L] S. M. R. Lopes, Complexidade em geometria euclidiana plana, praca magisterska, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
`http://www.mat.puc-rio.br/~hjbortol/complexidade/complexidade-em-geometria.pdf`

K O N I E C