Paradoksy logiczne

i inne

4 marca 2010

Paradoks

Twierdzenie niezgodne z powszechnie przyjętym mniemaniem, rozumowanie, którego elementy są pozornie oczywiste, ale wskutek zawartego w nim błędu logicznego lub nieostrości wyrażeń prowadzące do wniosków sprzecznych ze sobą lub z uprzednio przyjętymi założeniami.

Encyklopedia Multimedialna PWN

Paradoks (*potoczny*) - twierdzenie niezgodne z powszechnie przyjętym mniemaniem

Aporia - trudność myślowa, wynikająca z nieumiejętności rozstrzygnięcia wartości argumentów za i przeciw pewnej tezie

Antynomia - sprzeczność, wynikająca z rozumowania uznanego za poprawne i przesłanek uznanych za prawdziwe

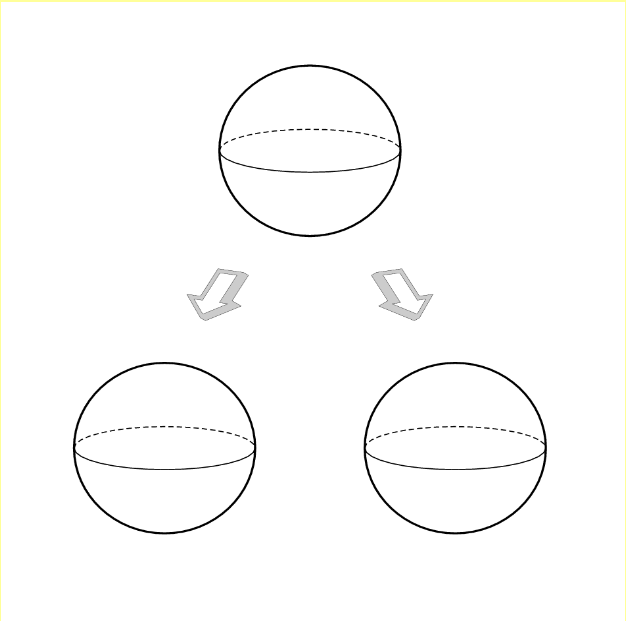
Sofizmat - rozumowanie często świadomie błędne, mające na celu oszukanie słuchacza lub czytelnika

Paradoksy matematyczne…

Paradoks Banacha-Tarskiego:

Każde dwa ograniczone podzbiory przestrzeni R^3 o niepustych wnętrzach są równoważne przez rozkład skończony.

W szczególności dowolna kula jest równoważna dwóm kulom do niej przystającym.



Paradoksy matematyczne…

Prosty paradoks teorio-mnogościowy:

Zbiór R jest *równie liczny* jak przedział [0, 1].

Paradoks Skolema-Löwenheima:

Istnieje przeliczalny model teorii mnogości.

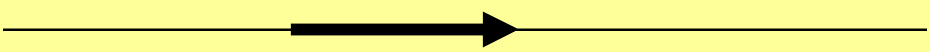
W szczególności, w tym modelu prawdziwe jest zdanie stwierdzające istnienie zbiorów nieprzeliczalnych.

Aporie...

Zenon z Elei (460 - 370 p.n.e.)

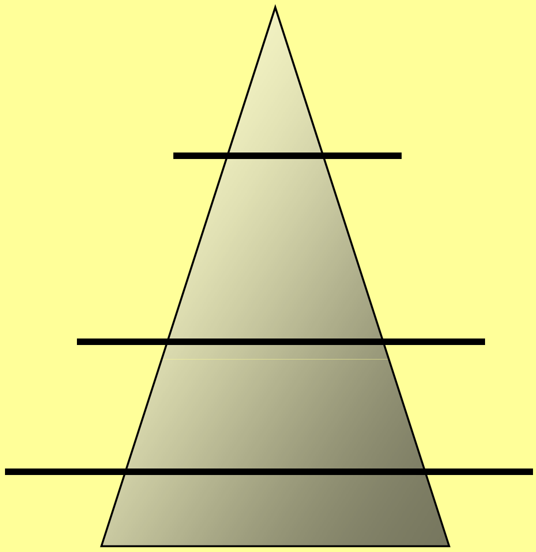
Paradoks strzały: W każdym punkcie drogi strzała jest nieruchoma, nie może więc tej drogi pokonać i dotrzeć do celu.

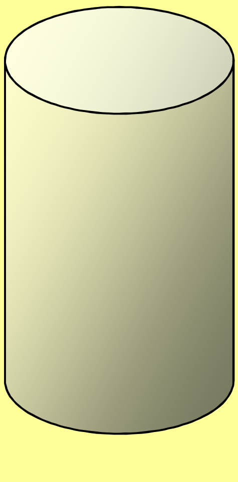
Start *Cel*

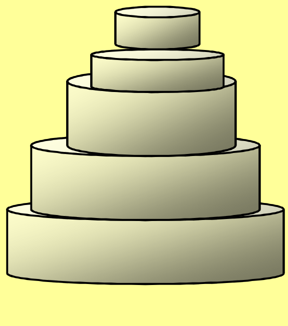


Demokryt (przełom V i IV w. p.n.e.)

Czy pola przekrojów stożka są jednakowe czy różne?







Antynomie…

Bertrand Russell (1872 - 1970)

Paradoks Russella:

Niech $Z = \{ X: X \notin X\}$. Czy $Z \in Z$?

Jeśli $Z \notin Z$, to spełnia warunek należenia do Z, więc $Z \in Z$.

Jeśli $Z \in Z$, to Z nie spełnia warunku należenia do Z, więc $Z \notin Z$.

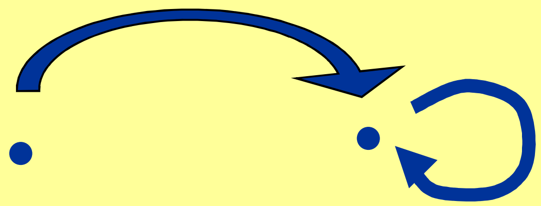
$$\mathbf{Z} \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow \mathbf{Z} \notin \mathbf{Z}$$

Gra uniwersalna

Ruch 1: Wybierz grę normalną.

Ruch 2: Wykonaj Ruch 1 wybranej gry.

Ruch 3, 4, 5,….: Wykonaj kolejny ruch wybranej gry.



Paradoks kłamcy

Epimenides (VI w.p.n.e.)

„Wszyscy Kreteńczycy są kłamcami”

„Ja jestem kłamcą”

Eubulides (IV w. p.n.e.)

„To, co teraz mówię, jest kłamstwem”

(Paradoks kłamcy)

czyli

***Z*: Zdanie *Z* jest fałszywe**

Dodatkowa wartość logiczna?

_Z_: Zdanie _Z_ jest fałszywe lub zdanie _Z_ nie ma wartości logicznej

Jeśli Z prawdziwe, to Z fałszywe lub nie ma wartości logicznej - a więc Z nie prawdziwe.

Jeśli Z fałszywe, to Z prawdziwe (stwierdza prawdę)

Jeśli Z nie ma wartości logicznej, to Z prawdziwe (stwierdza prawdę)

_Z_: Zdanie _Z_ nie jest prawdziwe

Z_1: Zdanie Z_2 jest fałszywe

Z_2: Zdanie Z_1 jest prawdziwe

Jeśli Z_2 jest prawdziwe, to Z_1 **jest** prawdziwe, więc Z_2 jest fałszywe.

Jeśli Z_2 jest fałszywe, to Z_1 **nie jest** prawdziwe, więc Z_2 jest prawdziwe.

Z_1: Zdanie Z_2 jest fałszywe

Z_2: Zdanie Z_3 jest fałszywe

Z_3: Zdanie Z_1 jest fałszywe

itd.........

Z_1: Dla każdego $k>1$, zdanie Z_k jest fałszywe

Z_2: Dla każdego $k>2$, zdanie Z_k jest fałszywe

...

Z_n: Dla każdego $k>n$, zdanie Z_k jest fałszywe

...

Jeśli Z_n prawdziwe (dla pewnego n), to

$$Z_{n+1},\ Z_{n+2},\ Z_{n+3},\ \ldots$$

czyli wszystkie zdania Z_k, gdy $k>n$, **są** fałszywe.

Jednocześnie zdanie Z_{n+1} jest prawdziwe, bo zdania

$$Z_{n+2},\ Z_{n+3},\ \ldots$$

są fałszywe.

Dowody…

1. **Nieprawda, że A**
2. **Nieprawda, że B**
3. **Co najmniej jedno z tych trzech zdań jest fałszywe**

Wniosek: A lub B

Jean Buridan (XIV w.)

Dowód istnienia Boga:

1. Bóg istnieje

2. Każde zdanie w tej parze jest fałszywe

Wniosek: Bóg istnieje.

Twierdzenie Gödla o niezupełności (I):

Dla każdej dostatecznie bogatej teorii niesprzecznej istnieje zdanie G takie, że ani G, ani ¬G nie są jej twierdzeniami.

Zdanie Gödla:

G: nie istnieje dowód zdania G

Twierdzenie Gödla o niezupełności (II):

Jeśli dostatecznie bogata teoria jest niesprzeczna, to jej niesprzeczności nie można w niej udowodnić.

Jeśli

A: teoria jest niesprzeczna,

to

B: nie istnieje dowód zdania G

A: Teoria jest niesprzeczna

B: Nie istnieje dowód zdania G

$\boxed{\textit{Jeśli } \mathbf{A} \textit{ i } \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}\text{, to } \mathbf{B}}$

Sofizmaty...

Twierdzenie: **$e = \pi$.**

Lemat: **dla każdej liczby naturalnej *n* prawdziwe jest zdanie**

$$\textbf{Jeśli } m \le n, \textbf{ to } m = n.$$

Dowód lematu:

Dla $n=1$:

jeśli $m \le 1$, to $m=1$, zatem $m=n$.

Załóżmy, że zdanie z lematu jest prawdziwe dla pewnej liczby naturalnej n.

Niech $m \le n+1$. Wtedy

$$m-1 \le n$$

i z założenia indukcyjnego $m-1 = n$. Stąd

$$m = n+1.$$

Dowód twierdzenia:

$$2 \leq e \leq 3$$

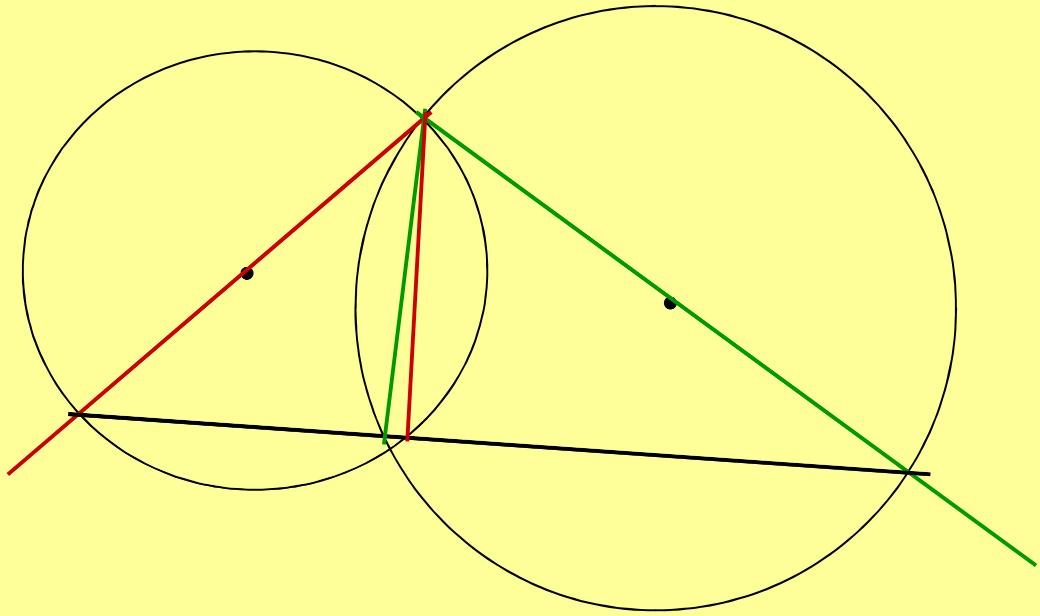
$$3 \leq \pi \leq 4$$

Z lematu, $2 = 3$, zatem $e = 3$

Z lematu, $3 = 4$, zatem $\pi = 3$.

$\boxed{\textbf{Stąd } e = \pi}$

Trójkąt o dwóch kątach prostych



K O N I E C

Dziękuję za uwagę